

القياس الخارجي:

لتكن X مجموعة غير خالية و 2^X صف كل المجموعات الجزئية غير خالية

تعريف القياس الخارجي:

هو دالة المجموعات

$$A \rightarrow \mu^*(A)$$

و كصفة طابع:

$$\mu^*(\emptyset) = 0 \quad (12)$$

(نقطة 2) مبرنة إذا كان $A, B \in 2^X$ و $A \subset B$

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) \quad \text{بأنه}$$

(نقطة 3) إذا كانت $A_n \subset 2^X$ و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ فإنه:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

ملاحظة:

القياس الخارجي μ^* دالة موجبة لأنه:

$$\emptyset \subset A, A \in 2^X \Rightarrow 0 = \mu^*(\emptyset) \leq \mu^*(A), \forall A \in 2^X$$

ملاحظة:

كل قياس μ هو قياس خارجي على 2^X ، لكن العكس غير صحيح الحالة العامة كما سيبين المثال التالي.

مثال:

لتكن المجموعة $X = \{a, b\}$ و $2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ و نعرف الدالة μ^* بالشكل

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{إذا } A = \emptyset \\ 1 & \text{إذا } A \neq \emptyset \end{cases}$$

ولتكن μ^* قياس خارجي على 2^X ، ولتكن قياساً

و لنلاحظ:

$$\mu^*(\emptyset) = 0, \quad \mu^*(\{a\}) = 1$$

$$\mu^*(\{b\}) = 1, \quad \mu^*(\{X\}) = 1$$

- كل قياس μ هو قياس خارجي ، انعكاسي ويزداد في الحالة لانه .

1 / 1

(قمة 1) واضح $\mu^*\{\emptyset\} = 0$

(قمة 2) $\mu^*\{a\} \cup \{b\} = 1 \leq 1 + 1 =$

$\mu^*\{a\} + \mu^*\{b\}$

(قمة 2.2)

$\{a\} \subset X, \{b\} \subset X$

لدينا

$1 = \mu^*\{a\} \leq \mu^*\{X\} = 1$

لذلك

$1 = \mu^*\{b\} \leq \mu^*\{X\} = 1$

وبذلك يكون μ^* قياساً خارجياً على 2^X وليكن μ^* قياساً خارجياً

$\mu^*\{a\} \cup \{b\} = 1$

$\mu^*\{a\} + \mu^*\{b\} = 1 + 1 = 2$

بفرض

$\mu^*\{a\} \cup \{b\} \neq \mu^*\{a\} + \mu^*\{b\}$

نلاحظ

$\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$

حيث

وهذه تسمى بـ **قياس خارجي**

$\mu : H \rightarrow [0, \infty]$ قياس خارجي

ليكن $[0, \infty]$

ولكن دالة المجموعات

$\mu^* : 2^X \rightarrow [0, \infty]$

$A \rightarrow \mu^*(A)$

نعرفه بالقياس

$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : \{A_n\} \subset H, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$

أي أنه μ^* هو أصغر قياس خارجي لـ A مجموعة

حيث $A \subset 2^X$ مجموعة A_n حيث $A_n \in H$

$\mu^*(A)$ أصغر قياس خارجي لـ A مجموعة

لأنه μ^* قياس خارجي على 2^X كما نرى

نلاحظ أن $\mu^*|_H = \mu$

التحديد في الفضاء إلى التبريد

المعقول في التبريد إلى التبريد

تعريف التبريد المعقول

ليكن X مجموعة غير فارغة وليكن 2^X صف كل المجموعات الجزئية في X
 وليكن H_1, H_2 صفين جزئيين في 2^X بحيث $H_1 \subset H_2$
 وليكن δ دالة المجموعات

$$\delta_1: H_1 \rightarrow [-\infty, +\infty]$$

$$\delta_2: H_2 \rightarrow [-\infty, +\infty]$$

عندئذ نقول:

(أ) الدالة δ_2 تحديد للدالة δ_1 من الصف H_1 إلى الصف H_2
 إذا كان: $\forall A \in H_1, \delta_2(A) = \delta_1(A)$
 وتكتب: $\delta_2 = \delta_1$

(ب) إذا حققت (أ) نقول إن δ_2 يمتد δ_1 على الصف H_2 على
 الصف H_1 وتكتب: $\delta_1 = \delta_2|_{H_1}$

ملحظة 1:

δ_1 و δ_2 في التعريف السابق قد تكونا متساويتين أو غير متساويتين
 (لأنهما تكرارهما) أداتية دالة مجموعات

ملحظة 2:

ليكن μ و μ^* كمان في البرهنة 1.

نلاحظ أن μ^* - تحديد لقياس μ من صف الحبر H إلى صف الحبر 2^X
 كمان لقياس μ هو مقياس خارجي μ^* من صف 2^X إلى الصف H
 يسمى μ^* لقياس الحبر (المولّد) المنتج هذا القياس μ
 كما سمي μ القياس (المولّد) للقياس الحبر μ^*

المجموعات القياسية :

ليكن $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ قياساً خارجياً

وليكن $E \in 2^X$

تعريف :

نقول ان المجموعة E مقبولة وفق μ^* (اذ μ^* مقبولة) اذا كان :

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c), \forall A \in 2^X$$

نرمز بـ \mathcal{M}_{μ^*} لصف كل المجموعات المقبولة لـ μ^* ملامعة

مما نقتضيه نلاحظ ان \mathcal{M}_{μ^*} مغلقاً تحت التماثل

(1) اذا كانت المجموعة E مقبولة وفق μ^* فتكون كذلك لمجموعة E^c

$$\mathcal{M}_{\mu^*} \subset 2^X \quad (2)$$

(3) لتأكد ان المجموعة E مقبولة نكتب ان \mathcal{M}_{μ^*} مغلقاً تحت الاتحاد

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c), \forall A \in 2^X$$

بأنه مغلقاً تحت الاتحاد

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

محققاً دائماً وذلك لان $A \subset X$. التالي :

$$A = A \cap X = A \cap (E \cup E^c) = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

(4) تكون المجموعة E مقبولة وفق μ^* اذا لم يكن على الأقل مجموعة $A_0 \subset 2^X$ بحيث ان :

$$\mu^*(A_0) \neq \mu^*(A_0 \cap E) + \mu^*(A_0 \cap E^c)$$

$$\mu^*(E \Delta G) = (\mu^*(E \setminus G) + \mu^*(G \setminus E))$$

$$\mu^*(E \Delta G) = (\mu^*(E \cup G) - \mu^*(E \cap G))$$

1 1

مبرهنة

ليكن μ^* قياساً خارجياً محدثاً

$$(1) \text{ إذا كانت } E \in 2^X \text{ في } \mu^*(E) = 0$$

فإن E مجموعة منتهية μ^*

$$(2) \text{ إذا كانت } E, G \in 2^X \text{ مجموعتان منتهيتان } \mu^*$$

فإن كل من المجموعتين

$$E \cup G, E \cap G, E \setminus G, E \Delta G$$

منتهية μ^*

البرهان

$$(1) \text{ من أجل أي مجموعة } A \subset 2^X \text{ لدينا}$$

$$A \cap E \subset E, A \cap E^c \subset A$$

لذلك تكون:

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A) = 0 + \mu^*(A)$$

أي أن:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c), \forall A \subset 2^X$$

وهذا يعني أن المجموعة E منتهية μ^*

(2)

لنضع $K = E \cup G$ فإن تكون K مجموعة منتهية μ^* بحسب حقيقة:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap K) + \mu^*(A \cap K^c), \forall A \subset 2^X$$

لكن

$$\mu^*(A \cap K) = \mu^*(A \cap (E \cup G)) = \mu^*((A \cap E) \cup (A \cap G))$$

$$\mu^*(A \cap K^c) = \mu^*(A \cap (E \cup G)^c) = \mu^*(A \cap E^c \cap G^c)$$

بما أن E مجموعة منتهية μ^*

$$\mu^*(A \cap K) = \mu^*[(A \cap K) \cap E] + \mu^*[(A \cap K) \cap E^c]$$

$$= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c \cap G) \quad ; A \subset 2^X$$

$$\mu^*(A \cap k) = \mu^*(A \cap E^c \cap G^c)$$

لدينا أيضاً:

$$\mu^*(A \cap k) + \mu^*(A \cap k^c) + \mu^*(A \cap E) + \underbrace{\mu^*(A \cap E^c \cap G)}_{\text{التي لا نحتاجها}}$$

$$+ \mu^*(A \cap E^c \cap G^c) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A)$$

(G) متيوسية

(E) متيوسية

; $\forall A \subset \mathbb{R}^n$

ولذلك تكون المجموعة $k = E \cup G$ متيوسية وفق μ^* دجائناً.

$$(E \cap G) = (E^c \cup G^c)^c$$

يشتق أن $E \cap G$ مجموعة متيوسية دجائناً.

$$E \setminus G = E \cap G^c$$

يشتق أن $E \setminus G$ مجموعة متيوسية دجائناً.

$$E \cap G = (E \setminus G) \cup (G \setminus E)$$

يشتق أن $E \cap G$ مجموعة متيوسية وفق μ^* نتيجة.

إذا كانت E_1, E_2, \dots, E_n مجموعات متيوسية وفق μ^* فليكون $\bigcup_{i=1}^n E_i$ د $\bigcap_{i=1}^n E_i$ مجموعات متيوسية وفق μ^*

مبرهنة (3) بدوينة بولجان:

إذا كانت E_1, E_2, \dots, E_n مجموعات متيوسية، متقللة متتالية فليكون $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ مجموعة متيوسية وفق μ^* كما أنه

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

الاشارة غير مطلوب.

تسعة

الصفات :

تجرباتی حیوانیات میں مفصلہ مشق مشق سے ماحولیات کی مجموعہ میں ہے

$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c \right)^c$ - دكارنول بقاؤه
المتكافئ

مقياس μ^* ($\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$)

مذہبہ لہوہ : کارائیووری

ليكن μ^* قياساً مذبذباً على 2^X وليكن μ^* مرفق المجموعات
 القوية ومقدر μ^* عندئذٍ ،
 () μ^* ، μ^* مذبذباً على \bar{X}

(c) μ^* مع μ بغير قسماً منزله μ آی:

μ^*

$$\mu = \mu^* \quad | \quad \mu \quad \mu^*$$

(۳) القياس من تمام.

∴ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (1)

$$E \setminus G \in \text{min}_{M^*} \text{ i.e. } E, G \in \text{min}_{M^*} \text{ c\u00fcnk\u00fc } M^*$$
$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \in \mathcal{M} \text{ ist } E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M} \text{ zu zeigen.}$$

دبالت لایه μ^* X ρ α μ

كبح الفرض بأنه $\mu^*(\emptyset) = 0$ وبالتالي فإنه \emptyset مجموعة متيقة
لذلك يكون $X = \emptyset^c$ (وهي مفعلة، خالصة، دورًا) مجموعة متيقة
أي أن $X \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ أي أن μ لا يترك X

(c) $\mu = \mu^* \left| \frac{\mu}{\mu^*} \right|$ ونسبة $\frac{\mu}{\mu^*}$ هي

(ق) احوال، حالات، وضع

$\mu(\phi) = \mu^*(\phi) = 0$ μ^* OK ✓

(2) مزاياي تجرید EE, M فایده

$$\mu(E) = \mu^*(E) \geq 0 \quad \mu^*$$

(اقتضى) لتكن $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}$ ، ومنفصلة متتالية متناهية عندها يكون

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_n) \quad \text{مجموعه ها جدا}$$
$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^+(E_n)$$
$$= \frac{1}{\mu^*} \text{couple } M \text{ dist}$$

(٣) إثبات أن القياس μ تمام ونفرض.

$$E \subset M, \mu(E) = 0, F \subset E$$

ونثبت أن المجموعة F مقومة بالقياس μ^* ($F \in M_{\mu^*}$)

من أجل إثبات مجموعة $AC 2^X$ لدينا :

$$\mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*[(A \cap E^c) \cup$$

$$\cup (A \cap (E \setminus E))] \leq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap E^c)$$

$$= \mu^*(A)$$

وبذلك يكون $F \in M_{\mu^*}$ والقياس μ^* تمام.

مبرهنة 5

إذا كان $\mu^*(G) = 0$ فإنه :

$$\mu^*(E \setminus G) = \mu^*(E \cup G) = \mu^*(E)$$

حيث $E \in M_{\mu^*}$

الإثبات : إثبات $E \subset (E \cup G)$ متبوعاً :

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cup G) \leq \mu^*(E) + \mu^*(G) = \mu^*(E) + 0$$

$$\rightarrow \mu^*(E \cup G) = \mu^*(E)$$

وبما أن :

$$E \subset (E \cup G), (E \setminus G) \subset E$$

فنتبع

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \setminus G) + \mu^*(G) \leq \mu^*(E) + 0$$

$$\rightarrow \mu^*(E \setminus G) = \mu^*(E)$$

انتهى البرهان